El juego de las cifras restadas

Todos los números empleados serán naturales (incluyendo el 0).

1. Planteamiento

Sea un número natural A expresado en base $n+1$:

Definición

$$A \equiv \sum_{i=0}^{i=N} c_i (n+1)^i$$

La diferencia de A y la suma de sus cifras es un múltiplo de n:

Teorema 1.1.

$$A - \sum_{i=0}^{i=N} c_i = n \cdot B$$

Se pide demostrar el anterior resultado.

2. Solución

Será necesario hacer uso del siguiente lema:

Lema 2.1.

$$\sum_{i=0}^{i=j} n(n+1)^i + 1 = (n+i)^{j+1}$$

Para ver que el anterior lema es correcto, basta aplicar de forma sucesiva, para orden creciente de i, el siguiente resultado:

$$n(n+1)^i + (n+1)^i = (n+1)(n+1)^i = (n+1)^{i+1}$$

Ahora es posible pasar a la demostración del teorema (1.1):

Demostración. En primer lugar, si A tiene una única cifra, entonces el resultado es trivial:

$$c_0(n+1)^0 - c_0 = 0 = n \cdot 0 \tag{1}$$

Si A es una potencia entera de $n+1$, reordenando los términos del lema (2.1) y haciendo $j = N-1$:

$$(n+1)^N - 1 = n \cdot \left(\sum_{i=0}^{i=N-1} (n+1)^i \right) \tag{2}$$

Si A tiene una única cifra no nula, haciendo uso del anterior resultado (2):

$$c_N(n+1)^N - c_N = n \cdot \left(c_N \sum_{i=0}^{i=N-1} (n+1)^i \right) \tag{3}$$

Haciendo uso de los resultados parciales (1) y (3) se llega al caso general de dos o más cifras:

$$\sum_{i=0}^{i=N} c_i(n+i)^i - \sum_{i=0}^{i=N} c_i = n \cdot \left(\sum_{i=1}^{i=N} c_i \sum_{j=0}^{j=i-1} (n+1)^j \right) = n \cdot B \tag{4}$$

□